ENSA d'Al-Hoceima
AP-I, Première Année,
Analyse I,

Année 2019/2020
Semestre 1

DS1 : Analyse Réelle, 2 heures

Exercice 1

Soit $d > 0$ un nombre rationnel tel que $d \neq r^2$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et soit l'application $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = \dfrac{x(x^2+3d)}{3x^2+d}$.

1. Montrer que f est injective.
2. Soit $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2$ tels que $A_1 = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 < d\}$ et $A_2 = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 > d\}$
   (a) Montrer que $f(x) - x < 0$ pour tout $x \in A_1$.
   (b) Montrer que $f(x) - x > 0$ pour tout $x \in A_2$.
   (c) En déduire que $\sup(A_1) \notin A_1$ et $\inf(A_2) \notin A_2$.
3. Le couple (A_1, A_2) s'appelle une **coupure de Dedekind**. Montrer qu'on peut définir $\sqrt{2}$ à l'aide d'une coupure de Dedekind.

Exercice 2

Soient $b > 0$ et $a \geq 0$ deux nombres réelles. On considère la suite définie par

$$u_0 = \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{a + b\,u_n} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0$$

1. A quelles conditions, vérifiées par α, la suite u_n est-elle définie ? **Justifier**
2. A quelles conditions, vérifiées par α, la suite u_n est-elle décroissante ? **Justifier**
3. Supposons que ces conditions sont satisfaites. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, puis calculer sa limite.

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$

1. Étudier la fonction f (Domaine de définition, Tableau de variation,...)
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$.
3. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.
   (a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $e_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.
      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq e_{n+1} \leq e_n^2$.

ii. Montrer que : $e_1 \leq \frac{1}{10}$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq e_n \leq \frac{1}{10^{2^{n-1}}}$.

(c) Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 *(Les questions sont indépendantes)*

1. Montrer que l'ensemble $E = \left\{ \frac{pq}{p^2+q^2} \;/\; (p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$ est majoré, minoré et atteint ses bornes.
2. Montrer que si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, alors $(|u_n|)_{n\geq 0}$ est aussi une suite de Cauchy. La réciproque est-elle vraie ? **Justifier**.
3. Montrer que de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.
4. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers ℓ. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et qu'il existe un voisinage V_ℓ de ℓ contenant $(u_n)_{n\geq N}$; en déduire qu'il existe des voisinages V_1 de $u_1, \ldots, V_{N-1}$ de u_{N-1} tels que $(u_n)_{n\geq 0} \subset V_\ell \cup (V_1 \cup \ldots \cup V_{N-1})$.